IV Congresso RIBIE, Brasilia 1998

A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA EM AMBIENTES INFORMATIZADOS

Maria Alice Gravina gravina@if.ufrgs.br

Lucila Maria Santarosa lucila@cesup.ufrgs.br

Resumo: Este trabalho analisa ambientes informatizados que apresentam recursos em consonância com processo de aprendizagem construtivista, o qual tem como princípio básico que o conhecimento se constroe a partir das ações do sujeito. A luz da teoria de desenvolvimento cognitivo de J.Piaget são destacados alguns dos recursos que dão suporte as ações do sujeito e que consequentemente favorecem a construção do conhecimento matemático. Na aprendizagem da Matemática este suporte é a possibilidade do "fazer matemática': experimentar, visualizar múltiplas facetas, generalizar, conjeturar e enfim demonstrar. Exemplos de alguns ambientes ilustram tal processo.

INTRODUÇÃO

Esta artigo pretende identificar 'o que de diferente' oferecem os ambientes informatizados que tem-se a disposição atualmente e o que estas diferenças trazem de significativo para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática (segundo grau e séries finais do primeiro grau) e para o desenvolvimento cognitivo do indivíduo.

Não são de interesse as ferramentas que guardam características de métodos de ensino que privilegiam simplesmente a transmissão de conhecimento e em que a 'medida' de aquisição deste conhecimento é dada pela habilidade do aluno em memorizá-lo e reproduzi-lo, sem que se evidencie um verdadeiro entendimento. Mas sim aquelas que trazem em seus projetos recursos em consonância com concepção de aprendizagem dentro de uma abordagem construtivista, a qual tem como princípio que o conhecimento é construído a partir de percepções e ações do sujeito, constantemente mediadas por estruturas mentais já construídas ou que vão se construindo ao longo do processo, tomando-se aqui a teoria do desenvolvimento cognitivo de J.Piaget como base teórica. Esta teoria mostra que toda a aprendizagem depende fundamentalmente de ações coordenadas do sujeito, quer sejam de caráter concreto ou caráter abstrato.

No contexto da Matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o 'fazer matemática': experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de 'fatos', geralmente na forma de definições e propriedades. Numa tal apresentação formal e discursiva, os alunos não se engajam em ações que desafiem suas capacidades cognitivas, sendo-lhes exigido no máximo memorização e repetição, e consequentemente não são autores das construções que dão sentido ao conhecimento matemático. O processo de pesquisa vivenciado pelo matemático profissional evidencia a inadequabilidade de tal abordagem. Na pesquisa matemática , o conhecimento é construído a partir de muita investigação e exploração, e a formalização é simplesmente o coroamento deste trabalho, que culmina na escrita formal e organizada dos resultados obtidos! O processo de aprendizagem deveria ser similar a este, diferindo essencialmente quanto ao grau de conhecimento já adquirido.

Durante alguns anos, a linguagem Logo se apresentou como uma das poucas ferramentas computacionais, se não a única, que tinha como concepção pedagógica que 'só se aprende fazendo, experimentando, investigando'. No geral os programas disponíveis eram do tipo 'instrução assistida por computador'. Nos dias de hoje ainda é grande a oferta de programas deste último tipo, que mesmo tendo interface com interessantes recursos de hipermídia (som, imagem, animação, texto não linear), nada mais oferecem aos alunos do que ler definições e propriedades e aplicá-las em exercícios práticos (tipo tutorial) ou testar e fixar 'conhecimentos' através da realização de exercícios protótipos e repetitivos, que no máximo avançam em grau de dificuldade (tipo prática de exercícios).

Se almeja-se uma mudança de paradigma para a educação, é necessário ser crítico e cuidadoso neste processo de uso da informática. A informática por si só não garante esta mudança, e muitas vezes se pode ser enganado pelo visual atrativo dos recursos tecnológicos que são oferecidos, mas os quais simplesmente reforçam as mesmas características do modelo de escola que privilegia a transmissão do conhecimento.

Já dispõe-se de programas com características que os tornam potentes ferramentas para o ensino e aprendizagem da Matemática dentro de uma perspectiva construtivista e é isto que quer-se analisar neste artigo. São programas onde os alunos podem modelar, analisar simulações, fazer experimentos, conjeturar. Nestes ambientes os alunos expressam, confrontam e refinam suas idéias, e 'programam' o computador sem precisar usar recursos de linguagem de programação, diferentemente do que acontece com micro-mundos no ambiente Logo. Utilizam, pelo contrário, processos de representação muito próximos dos processos de representação com "lápis e papel", não sendo-lhes exigido o conhecimento e domínio de uma nova sintaxe e morfologia, aspectos inerentes a uma linguagem de programação.

A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NUMA PERSPECTIVA CONSTRUTIVISTA

A orientação que se dá para a Educação Matemática certamente depende de concepções sobre a natureza do conhecimento matemático (tomado aqui num sentido bem amplo) e de como acontece o desenvolvimento cognitivo do ser humano.

A Matemática, como área de conhecimento, apresenta duas características distintas:

- é ferramenta para o entendimento de problemas nas mais variadas áreas do conhecimento. Fórmulas, teoremas e, mais geralmente, teorias matemáticas são usados na resolução de problemas práticos e na explicação de fenômenos nas mais variadas áreas do conhecimento. Neste sentido, o aspecto importante é a aplicabilidade da Matemática.

- é desenvolvimento de conceitos e teoremas que vão constituir uma estrutura matemáticas. O objetivo é a descoberta de regularidades e de invariantes, cuja evidência se estabelece pela demonstração baseada no de raciocínio lógico e mediado tão somente pelos axiomas de fudamentação da estrutura e teoremas já destes deduzidos. É investigação no plano puramente matemático.

Em artigo no Mathematical Intelligencer, Chandler&Edwards fazem clara referência a estes dois aspectos:

"Para os matemáticos, um perene problema é explicar ao grande público que a importância da Matemática vai além de sua aplicabilidade. É como explicar a alguém que nunca ouviu música a beleza de uma melodia...Que se aprenda a Matemática que resolve problemas práticos da vida, mas que não se pense que esta é a sua qualidade essencial. Existe uma grande tradição cultural a ser preservada e enriquecida, em cada geração. Que tenha-se cuidado, ao educar, para que nenhuma geração torne-se surda as melodias que são a substância de nossa grande cultura matemática..."

Na história do desenvolvimento da Matemática estas características estão em permanente relação. A partir de busca de solução de problemas em outras áreas de conhecimento, surge o desenvolvimento de Matemática de caráter puramente abstrato. E desenvolvimentos puramente teóricos, acabam apresentando-se como ferramentas para tratabilidade de problemas em outras áreas de conhecimento. A história da evolução da Geometria nos mostra bem este duplo aspecto da Matemática. Na antigüidade surge como ciência prática na solução de problemas de medidas; com os gregos torna-se conhecimento de caráter abstrato, tomando como ponto de partida axiomas indiscutíveis sob o ponto de vista intuitivo, inspirados que são pelo mundo físico; com as geometrias não-euclidianas, no século XIX, tem-se o caráter abstrato ao extremo, já que os axiomas aceitos não se baseiam mais na intuição imediata; e finalmente tem-se a aplicação destas geometrias no entendimento de problemas da física.

No processo educativo estes dois aspectos da Matemática devem ser enfatizados igualmente. Um dos grandes desafios para os educadores matemáticos é encontrar os caminhos que levem seus alunos a apropriarem-se deste conhecimento. E para isto, questões de ordem cognitiva merecem uma análise.

A teoria de desenvolvimento cognitivo proposta por J. Piaget, ajuda a compreender que o pensamento matemático não é, em essência, diferente do pensamento humano mais geral, no sentido de que ambos requerem habilidades como intuição, senso comum, apreciação de regularidades, senso estético, representação, abstração e generalização, etc... A diferença que pode ser considerada é no universo de trabalho: na Matemática os objetos são de caráter abstrato e são rigorosos os critérios para o estabelecimento de verdades.

Os estudos de Piaget evidenciam já nos primeiros anos de vida os primórdios destas habilidades. Sua teoria, procura explicar o complexo processo através do qual se dá o desenvolvimento das funções cognitivas da inteligência. Através de suas cuidadosas observações e entrevistas clínicas, 'disseca' os diversos estágios deste processo, mostrando a contínua evolução das estruturas mentais, e cujo estado mais avançado se caracteriza pelo pensamento formal abstrato.

Para melhor entendimento do processo evolutivo das estruturas cognitivas, Piaget destacada três estágios básicos. Na construção dos primeiros esquemas de natureza lógico-matemática as crianças se apoiam em ações sensório-motoras sobre objetos materiais e através de exercícios de repetição espontânea chegam ao domínio e generalização da ação (estágio pré-operatório). O segundo estágio caracteriza-se pelo aparecimento das operações, as ações em pensamento; mas nesta fase as crianças ainda dependem dos objetos concretos para que as ações se constituam em conceitos (estágio operatório concreto). E finalmente atingem o estágio das operações sobre objetos abstratos, já não dependendo mais de ações concretas ou de objetos concreto; é a constituição do pensamento puramente abstrato.

O que quer-se destacar é o quanto o processo de aprendizagem se baseia na ação do sujeito; inicialmente, as ações concretas sobre objetos concretos respondem pela constituição dos esquemas, e no último estágio, as ações abstratas (operações) sobre objetos abstratos respondem pela constituição dos conceitos. Diz Piaget (1974): "*só falaríamos de aprendizagem na medida em que um resultado (conhecimento ou atuação) é adquirido em função da experiência , essa experiência podendo ser do tipo físico ou do tipo lógico-matemático ou os dois.*"

Já no primeiro estágio de desenvolvimento, na construção e coordenação de esquemas evidencia-se o uso de regras muito próximas a da lógica - associação (união), generalização (inclusão), restrição (interseção) . Percebe-se uma construção espontânea de estruturas lógico -matemáticas, que se aproximam das utilizadas no desenvolvimento do conhecimento matemático. É a gênese do pensamento lógico-matemático, que se apresenta na forma de generalização de ações e coordenação de esquemas.

É esclarecedor o que diz Piaget (1973), particularmente no contexto da Educação Matemática:

"O papel inicial das ações e das experiências lógico matemáticas concretas é precisamente de preparação necessária para chegar-se ao desenvolvimento do espírito dedutivo, e isto por duas razões. A primeira é que as operações mentais ou intelectuais que intervém nestas deduções posteriores derivam justamente das ações: ações interiorizadas, e quando esta interiorização, junto com as coordenações que supõem, são suficientes, as experiências lógico matemáticas enquanto ações materiais resultam já inúteis e a dedução interior se bastará a si mesmo. A segunda razão é que a coordenação de ações e as experiências lógico matemáticas dão

lugar, ao interiorizar-se , a um tipo particular de abstração que corresponde precisamente a abstração lógica e matemática".

Todo o processo é permeado pelo desenvolvimento, concomitante, da função representativa; é a representação mental que permite a transição da ação sensório-motora à ação abstrata. Os esquemas evoluem para conceitos e as ações para operações através da tomada de consciência, definida por Piaget como a reconstituição conceitual do que tem feito a ação. Becker (1997), a luz da teoria de Piaget, diz:

"É fácil vislumbrar o que isto significa para a aprendizagem. O esquema, generalização no plano da ação concreta, poderá mediante progressivas tomadas de consciência, tornar-se conceito, generalização no plano mental ou intelectual. Dos limites do real passa-se ao possível..."

Os desequilíbrios entre experiência e estruturas mentais é que fazem o sujeito avançar no seu desenvolvimento cognitivo e conhecimento, e Piaget procura mostrar o quanto este processo é natural. O novo objeto de conhecimento é *assimilado* pelo sujeito através das estruturas já constituídas, sendo o objeto percebido de uma certa maneira; o 'novo' produz conflitos internos, que são superados pela *acomodação* das estruturas cognitivas, e o objeto passa a ser percebido de outra forma. Neste processo dialético é construído o conhecimento. O meio social tem papel fundamental na aceleração ou retardação deste desenvolvimento; isto se evidencia na decalagem de estruturas cognitivas que apresentam indivíduos que vivem em meios culturalmente pobres.

Na formação matemática dos alunos, além de pretender-se a construção de uma sólida base de conhecimento na área, deve-se estar atento para a riqueza intelectual que decorre do constante desenvolvimento cognitivo do sujeito quando a ele propicia-se imersão no processo do 'fazer matemática', que nada mais é que o processo dinâmico 'assimilação versus acomodação' de construção simultânea de conhecimento matemático e de estruturas mentais. Fischbein (1994) diz:

"Axiomas, definições, teoremas e demonstrações devem ser incorporados como componentes ativos do processo de pensar. Eles devem ser inventados ou aprendidos, organizados, testados e usados ativamente pelos alunos. Entendimento do sentido de rigor no raciocínio dedutivo, o sentimento de coerência e consistência, a capacidade de pensar proposicionalmente, não são aquisições espontâneas. Na teoria piagetiana todas estas capacidades estão relacionadas com a idade - o estágio das operações formais. Esta capacidades não são mais do que potencialidades que somente um processo educativo é capaz de moldar e transformar em realidades mentais ativas."

Se por um lado a teoria de Piaget mostra uma continuidade, em princípio natural, na formação das estruturas cognitivas, desde os primeiros esquemas até as estruturas que respondem pelo pensamento formal abstrato, por outro lado o processo de ensino e aprendizagem que se tem institucionalizado não leva em consideração esta ‘naturalidade’. A partir do momento que as crianças ingressam na escola, no geral, são privadas de suas ações e experiências de caráter concreto, e mais adiante de caráter abstrato, reforçando-se ao longo dos anos de vida escolar o papel de receptores passivos de informação. Esta ruptura pode explicar os baixos níveis de pensamento abstrato com que os alunos chegam ao ensino superior. Gravina (1996) registra:

“... os alunos chegam à universidade sem terem atingido os níveis mentais da dedução e do rigor. Raciocínio dedutivo, métodos e generalizações - processos característicos e fundamentais da Geometria- os alunos pouco dominam. Até mesmo apresentam pouca compreensão dos objetos geométricos, confundindo propriedades do desenho com propriedades do objeto.”

Moore (1994), em sua pesquisa sobre obstáculos frente a demonstração de teoremas, identifica algumas causas: imagens mentais inadequadas, pouco entendimento dos conceitos, pouco domínio da linguagem e notação matemática.

Fala-se em processo de ensino e aprendizagem construtivista, entendendo-se uma metodologia de trabalho, ainda um tanto vaga e imprecisa, que procura colocar-se em sintonia, principalmente, com princípios da teoria de Piaget. Mas de fato, não tem-se ainda estabelecida, dentro das teorias da Educação, uma sólida base teórica do que seria uma ‘pedagogia construtivista’. Pesquisas na área de Educação Matemática tem se preocupado com estas questões, mas ainda poucos são os reflexos na prática educativa. Estas pesquisas apontam para princípios norteadores do que seria uma ‘pedagogia construtivista’:

*“É necessário que o professor de matemática organize um trabalho estruturado através de atividades que propiciem o desenvolvimento de exploração informal e investigação reflexiva e que não privem os alunos nas suas iniciativas e controle da situação. O professor deve projetar desafios que estimulem o questionamento, a colocação de problemas e a busca de solução. Os alunos não se tornam ativos aprendizes por acaso, mas por desafios projetados e estruturados, que visem a exploração e investigação” (*Richards, 1991)

“Um dos maiores problemas na educação decorre do fato que muitos professores consideram os conceitos matemáticos como objetos prontos, não percebendo que estes conceitos devem ser construídos pelos alunos...De alguma maneira os alunos devem vivenciar as mesmas dificuldades conceituais e superar os mesmos obstáculos epistemológicos encontrados pelos matemáticos...Solucionando problemas, discutindo conjeturas e métodos, tornando-se conscientes de suas concepções e dificuldades, os alunos sofrem importantes mudanças em suas idéias...” (Vergnaud, 1990)

“Na educação a preocupação principal deveria ser a construção de esquemas para o entendimento de conceitos. O ensino deveria se dedicar a induzir os alunos a fazerem estas construções e ajudá-los ao longo do processo...Aprender envolve abstração reflexiva sobre os

esquemas já existentes, para que novos esquemas se construam e favoreçam a construção de novos conceitos...Um esquema não se constroe quando há ausência de esquemas pre-requisitos...”(Dubinsky, 1991)

Para o estabelecimento de uma ‘pedagogia construtivista’ duas das principais questões, intimamente relacionadas, a serem enfocadas são:

- quanto ao aspecto matemático: como projetar atividades que façam com que os alunos se apropriem de idéias matemáticas profundas e significativas (e que exigiram de matemáticos altamente qualificados alguns anos para serem concebidas e estruturadas) ?
- quanto ao aspecto cognitivo: como fazer para que estas atividades coloquem os alunos em atitudes sintonizadas com os processos que são naturais ao desenvolvimento cognitivo do sujeito ?

Na próxima seção deste artigo procura-se mostrar de que forma os ambientes informatizados podem ajudar na busca de respostas a estas questões. São ambientes que dão suporte aos objetos matemáticos e as ações mentais dos alunos, e que portanto favorecem os processos imbricados de construção de conhecimento matemático e de desenvolvimento de estruturas cognitivas.

AMBIENTES INFORMATIZADOS E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Conforme delineado na seção anterior, está se tomando como princípio que a aprendizagem é um processo construtivo, que depende de modo fundamental das ações do sujeito e de suas reflexões sobre estas ações: *“Todo conhecimento é ligado à ação e conhecer um objeto ou evento á assimilá-lo à um esquema de ação...Isto é verdade do mais elementar nível sensório motor ao mais elevado nível de operações lógico -matemáticas”* (Piaget,1967).

No contexto da Matemática, são as ações, inicialmente sobre objetos concretos, que se generalizam em esquemas, e num estágio mais avançado são as ações sobre objetos abstratos que se generalizam em conceitos e teoremas. Quando a criança brinca com pedras, dispondo-as de diversas formas (segmentos de retas com diversas inclinações e tamanhos, círculos) e ao contar o número de pedras constata, com surpresa, que o número de pedras independe da forma em que estão dispostas, é através das ação concreta de ordenar e contar que constroe o conceito de número natural. Um matemático, em seu estágio avançado de pensamento formal, também ‘age’ sobre seus objetos de investigação: identifica, em casos particulares regularidades que se generalizam; testa suas conjeturas em novos casos particulares; e finalmente aventura-se na tentativa de demonstração. É o que diz Hadamard (1945):

“De fato, é óbvio que qualquer invenção ou descoberta, em Matemática ou em qualquer outra área, acontece pela combinação de idéias...algumas das quais podem ser férteis...É

necessário construir numerosas possibilidades de combinações, e encontrar dentre elas as que são proveitosas..."

Da criança ao matemático profissional, os objetos mudam de natureza: de físicos passam a abstratos, mas continuam guardando uma 'concretude', dada pela representação mental, figural ou simbólica, a eles associada, e é sobre estes objetos que são aplicadas as ações mentais. Neste sentido é interessante o que diz Ogborn (1997), a luz da teoria de Piaget, quando fala em "*raciocínio formal como um caso especial e bastante extraordinário de raciocínio concreto. Matemáticos e lógicos estão tão acostumados com seus sistemas de símbolos, que os tratam como objetos concretos."*

No processo de ensino e aprendizagem, a transição na natureza dos objetos sobre os quais os alunos aplicam as ações é uma questão central. O mundo físico é rico em objetos concretos para o início da aprendizagem em Matemática, no geral de caráter espontâneo. Mas se o objetivo é a construção de conceitos mais complexos e abstratos, estes não tem suporte materializado, entrando em jogo a 'concretização mental', que nem sempre é simples, mesmo para o matemático profissional. Este tipo de aprendizagem nem sempre tem caráter espontâneo e exige muitas vezes a construção de conceitos que são até mesmo, num primeiro momento, pouco intuitivos, portanto dependendo de muita ação mental por parte do aluno. Um exemplo ilustrativo, ao extremo, encontra-se na própria história do desenvolvimento da geometria: dois mil anos foram necessários para as mudanças de concepções que tornaram naturais as geometrias não-euclidianas. O grande obstáculo explica-se pelo caráter pouco intuitivo dos axiomas que definiriam estas geometrias, em oposição aos caráter espontâneo daqueles da geometria euclidiana, entendida até então como a geometria para o entendimento do mundo que nos rodeia (e hoje vê-se que, de fato, até onde nossos sentidos imediatos conseguem percebê-lo).

Obstáculos e a sua superação permeiam a história do desenvolvimento da Matemática. Na aprendizagem o processo é similar: por um lado temos o conhecimento matemático, no sentido de conhecimento socialmente aceito, e por outro lado a construção deste conhecimento através dos processos cognitivos individuais. Em relação aos conceitos, Vinner (1991) se refere aos primeiros como 'conceito definição' e aos últimos como 'conceitos imagens'. A aprendizagem se efetiva a partir do equilíbrio dos dois conceitos, e isto é fundamental para o avanço na construção do conhecimento. Enquanto os alunos encontram obstáculos em traçar reta tangente à curva $y = x^3$ no ponto (0,0) é porque o "conceito imagem" está incompleto, e portanto o objeto matemático 'reta tangente à curva' ainda não foi adequadamente construído.

Os ambientes informatizados apresentam-se como ferramentas de grande potencial frente aos obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem. É a possibilidade de "*mudar os limites entre o concreto e o formal*" (Papert, 1988). Ou ainda segundo Hebenstreint (1987):*"o computador permite criar um novo tipo de objeto - os objetos 'concreto-abstratos'. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados;*

abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais." Por exemplo, uma rotação não é mais somente um objeto matemático abstrato (dado por uma definição formal) acompanhado eventualmente de uma representação estática (desenho), mas um objeto que pode ser manipulado e entendido a partir de suas invarianças (ao mudar-se o centro de rotação, o ângulo de rotação, ao transformar figuras).

No campo da pesquisa em Matemática alguns exemplos são ilustrativos. A teoria do caos nasceu do estudo de equações diferenciais feito por Lorentz; ao implementar sistemas que diferenciavam minimamente nas condições iniciais, Lorentz constatou que a evolução do sistema, no tempo, se tornava imprevisível e a partir disto surgem os resultados teóricos sobre a instabilidade dos sistemas dinâmicos. Um segundo exemplo: a representação gráfica de computações massivas tornou possível o avanço da teoria de fractais. Figuras surpreendentes foram fontes de conjeturas que desencadearam a pesquisa na direção de demonstrações formais. Estes exemplos são paradigmáticos quanto ao suporte oferecido pelos ambientes informatizados na concretização mental de idéias matemáticas. Este suporte favorece a exploração, a elaboração de conjeturas e o refinamento destas, e a gradativa construção de uma teoria matemática formalizada.

E mesmo quando existe a possibilidade de ações sobre objetos físicos, a transposição destes objetos para ambientes informatizados também apresenta vantagens: é a possibilidade de realizar grande variedade de experimentos em pouco tempo, diferentemente da manipulação concreta. É a primazia da ação favorecendo o processo de investigação e abstração, com a conseqüente construção de conceitos e relações. Neste espírito tem-se como exemplo o programa "Blocks Microworld" de Thompson (1992), que permite a construção virtual do material multibase de Dienes.

É claro que o suporte para concretizações e ações mentais depende de características dos ambientes informatizados, algumas das quais serão propósito de análise no que segue. E a título de ilustração são apresentados exemplos de alguns programas.

1.Características de ambientes informatizados construtivistas

Esta análise toma como referência os trabalhos de Kaput (1992) e Mellar & at all (1994). Procura-se identificar de que forma as características aqui apontadas dão suporte as ações e reflexões sobre os objetos matemáticos, condição que está sendo tomada como indispensável na aprendizagem da Matemática.

1.1 Meio Dinâmico

Historicamente os sistemas de representação do conhecimento matemático tem caráter estático. Vê-se isto observando os livros ou assistindo uma aula 'clássica'. Este caráter estático muitas vezes dificulta a construção do significado, e o significante passa a ser um conjunto de símbolos e palavras ou desenho a ser memorizado. Assim sendo, não deve ser surpreendente quando os alunos não conseguem transferir um conceito ou teorema para situação que não coincide com a prototípica registrada a partir da apresentação do livro ou do professor.

A instância física de um sistema de representação afeta substancialmente a construção de conceitos e teoremas. As novas tecnologias oferecem instâncias físicas em que a representação passa a ter caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito as concretizações mentais. Um mesmo objeto matemático passa a ter representação mutável, diferentemente da representação estática das instâncias físicas tipo "lápis e papel" ou "giz e quadro-negro". O dinamismo é obtido através de manipulação direta sobre as representações que se apresentam na tela do computador. Por exemplo: em geometria são os elementos de um desenho que que são manipuláveis; no estudo de funções são objetos manipuláveis que descrevem relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis

Um aspecto importante do pensamento matemático é a abstração da invariância, e para o seu reconhecimento e entendimento nada é mais próprio que a variação. O dinamismo da representação destaca os invariantes e diz Kaput(1992): "*a transição continua entre estados intermediários é um recurso importante dos programas de representação dinâmicos, sob o ponto de vista cognitivo*". Por exemplo, após uma apresentação estática do conceito de altura de um triângulo os alunos registram que "*a altura de um triângulo é sempre da base até a parte mais alta do mesmo*" ou "*altura é a linha vertical que une a base lado do triângulo ao vértice oposto*" (Gravina,1996), mostrando concretização mental inadequada. Já num meio dinâmico um triângulo com correspondente segmento altura pode ser manipulado, mantendo-se um lado do triângulo fixo e fazendo-se o vértice oposto deslocar-se numa paralela a este lado. Desta forma obtém-se uma família de desenhos com triângulos e segmentos alturas em diversas situações, o que favorece a concretização mental em harmonia com o conceito matemático de altura de um triângulo.

1.2 Meio Interativo

Como interatividade entende-se aqui a dinâmica entre ações do aluno e reações do ambiente, e no sentido muito além daquele em que a reação do sistema é simplesmente informar sobre "acerto" ou "erro" frente a ação do aluno, não fornecendo nenhuma contribuição ao processo de aprendizagem. Na interatividade que está-se pensando, o sistema oferece suporte as concretizações e ações mentais do aluno; isto se materializa na representação dos objetos matemáticos na tela do computador e na possibilidade de manipular estes objetos via sua representação.

A 'reação' do ambiente, correspondente a ação do aluno, funciona como 'sensor' no ajuste entre o conceito matemático e sua concretização mental. Um meio que pretenda ser interativo, na medida do possível, não deve frustrar o aluno nos procedimentos exploratórios associados as suas ações mentais. Isto vai depender dos recurso que coloca a disposição e do nível de automação nos procedimentos. Alguns dos recurso já disponíveis em certos ambientes: ferramentas para construção de objetos matemáticos, múltiplas representações, procedimentos dos alunos podem ser registrados ou automatizados (capturação de procedimentos), auto-escala automática, zoom-in e zoom-out, dados que se atualizam com a dinâmica da situação, traçado de lugares geométricos, cálculos automáticos.

Quanto ao potencial das múltiplas representações, considerando que um mesmo objeto matemático pode receber diferentes representações e que estas registram diferentes facetas do mesmo, uma exploração que transita em diferentes sistemas torna-se significativa no processo de construção do conceito. Por exemplo, a uma função pode-se associar uma representação gráfica que evidencia variações qualitativas, ou uma representação matricial numérica que evidencia variações quantitativas, ou ainda um fenômeno cujo comportamento é dado pela função. Ou ainda, pode-se estudar família de funções sob o ponto de vista de operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados.

Os programas que fazem 'traduções' entre diferentes sistemas de representação apresentam-se como potentes recursos pedagógicos, principalmente porque o aluno pode concentrar-se em interpretar o efeito de suas ações frente as diferentes representações, até de forma simultânea, e não em aspectos relativos a transição de um sistema à outro, atividade que geralmente demanda tempo.

Capturação de procedimentos é recurso encontrado, particularmente, em programas para Geometria. Automaticamente são gravados os procedimentos do aluno em seu trabalho de construção, e mediante solicitação o aluno pode repassar a 'história' do desenvolvimento de sua construção. Isto permite o aluno refletir sobre suas ações e identificar possíveis razões para seus conflitos cognitivos. Este recurso também permite que o aluno explore construções feitas por outrem, o que sempre se apresenta como fonte de riqueza em idéias matemáticas.

Ainda através da capturação de procedimentos, construções particulares podem ser automaticamente generalizadas, gravadas e testadas em outras situações (são as macro construções). A capturação é feita na semântica da Geometria, não dependendo de sintaxe particular de programação. Por exemplo, um procedimento de construção das mediatrizes é generalizado e pode ser aplicado a qualquer outro triângulo, evidenciando-se no suporte concreto que a interseção das mediatrizes em único ponto não depende de particularidades do triângulo. Vê-se assim o ambiente favorecendo a construção de conjeturas, o que exige raciocínios mediados pelo constante processo de 'assimilação versus acomodação'. É claro que a construção do conhecimento vai além e não se realiza enquanto a argumentação matemática explícita não torna evidente o 'por que desta propriedade'. Nesta fase final de construção, a demonstração da propriedade, o ambiente continua desempenhando seu papel através da possibilidade de acrescentar novos elementos a representação que está sendo manipulada, no caso os segmentos que determinam os triângulos cujas congruências são a base para a argumentação.

1.3 Meio para modelagem ou simulação

Criar e explorar o modelo de um fenômeno é uma experiência importante no processo de aprendizagem. Segundo Ogborn (1997):

“Quando se constróem modelos começa-se a pensar matematicamente. A análise de um o modelo matemático, pode levar a compreensão de conceitos profundos, como por exemplo a noção fundamental de taxa de variação...A criação de modelos é o início do pensamento puramente teórico sobre o funcionamento das coisas.”

Em programas com recursos de modelagem os alunos constróem modelos a partir representação dada por expressões quantitativas (funções, taxas de variação, equações diferenciais) e de relações entre as variáveis que descrevem o processo ou fenômeno. A característica dominante da modelagem é a explicitação, manipulação e compreensão das relações entre as variáveis que controlam o fenômeno, sendo o feedback visual oferecido pela máquina um recurso fundamental para o ‘ajuste’ de idéias.

O recurso de simulação permite a realização de experimentos envolvendo conceito mais avançados. Neste caso, a complexidade analítica do modelo fica por conta do programa e os alunos exploram qualitativamente as relações matemáticas que se evidenciam no dinamismo da representação de caráter visual. Na exploração qualitativa não há preocupação com a dedução das relações matemáticas analíticas. Esta abordagem permite que alunos, ainda sem grande formação matemática, explorem fenômenos de natureza matemática complexa, mas que do ponto de vista puramente qualitativo são fecundos ‘germes’ de idéias matemáticas, como por exemplo as simulações de crescimento populacional e mais geralmente de sistemas dinâmicos.

Além destes dois aspectos, são ambientes que possibilitam tratar a Matemática também como ferramenta para resolução de problemas em outras áreas do conhecimento. Um exemplo ilustrativo é o estudo da parábola: em Matemática é um objeto abstrato, que pode ser representado por uma equação ou gráfico; em Física serve para descrever o movimento de um objeto em queda livre ou que é jogado verticalmente para cima. Propriedades matemáticas da equação passam a ter leitura física e vice-versa: ponto de máximo da função corresponde a altura máxima atingida pelo objeto; zero da função corresponde ao tempo de movimento; inclinação da reta tangente à curva é a velocidade. As relações entre conceitos matemáticos e fenômeno físico favorecem a construção do conhecimento em ambas as áreas.

2. Algumas questões pedagógicas

Na análise das características feita acima, toma-se como referência programas que tem em seus projetos de construção procupações de caráter pedagógico. São ferramentas direcionadas para a aprendizagem da Matemática, e que por conseguinte procuram oferecer recursos que viabilizem as ações mentais; são recursos que podem ajudá-los na superação de obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem da Matemática.

Nestes ambientes pode-se identificar dois modos de utilização, na direção de uma ‘pedagogia construtivista’:

2.1 Atividades de Expressão

O aluno cria seus próprios modelos (tomado aqui em sentido amplo) para expressar idéias e pensamentos. Suas concretizações mentais são exteriorizadas. Uma vez construído o modelo, através dos recursos do ambiente, o aluno pode refletir e experimentar, ajustando e/ou modificando suas concepções. Neste sentido, os ambientes são veículos de materialização de idéias, pensamentos e mais geralmente de ações do sujeito.

2.2 Atividades de Exploração

Ao aluno é apresentado um modelo já pronto, o qual deve ser explorado, entendido, analisado. Não são suas idéias que ali estão representadas, e portanto existe o desafio intelectual de compreendê-las. A própria compreensão do modelo, o entendimento dos princípios de construção, já são por si só estímulos ao raciocínio, que favorecem a construção de relações e conceitos.

Neste trabalho não foi propósito a análise de ferramentas mais gerais. São os programas de cálculo simbólico (Mathematica, Mapple,...) ou planilhas eletrônicas (Excel, Lotus,...) ou ainda linguagens de programação. Isto porque, embora sendo potentes ferramentas para a realização de cálculos matemáticos ou plotagem de gráficos ou implementação de algoritmos, não foram projetados com propósitos educativos, no sentido de oferecem recursos que auxiliem o aluno na construção de conhecimento e superação de dificuldades. Por exemplo, com um programa de cálculo simbólico um aluno pode calcular eficientemente a derivada ou integral de uma função, sem necessáriamente estar entendendo os significados de tais conceitos. Um trabalho de adaptação, orientado por propósitos pedagógicos, até pode ser feito, mas certamente não é simples, e está é uma questão que vem sendo objeto de pesquisa.

Dentre as linguagens de programação deve-se excetuar a linguagem Logo, projetada a partir de princípios pedagógicos construtivistas, mas na qual não vamos nos deter neste trabalho. Seu potencial está amplamente documentado em pesquisas (Hoyles, Noss, Sutherland, Edwards e outros) e transparece claramente nas palavras de Papert (1994):

> *"...programar a tartaruga começa com a reflexão sobre como nós fazemos o que gostaríamos que ela fizesse; assim, ensiná-la a agir ou ‘pensar’ pode levar-nos a refletir sobre nossas próprias ações ou pensamentos...E a medida que as crianças progridem, passam a programar o computador para tomar decisões mais complexas e acabam engajando-se na reflexão de aspectos mais complexos do seu próprio pensamento."*

3. Alguns programas ilustrativos

Os programas aqui apresentados servem para ilustrar as questões discutidas anteriormente. São apresentadas as principais características de cada um deles e exemplos ilustrativos.

3.1 Cabri Geometry e Sketchpad - ferramentas para Geometria

São ferramentas, especialmente, para construções em Geometria. Dispõem de 'régua e compasso eletrônicos', sendo a interface de menus de construção em linguagem clássica da Geometria. Os desenhos de objetos geométricos são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado conceito ou teorema temos associada uma coleção de 'desenhos em movimento', e as características invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades em questão. O aluno age sobre os objetos matemáticos num contexto abstrato, mas tem como suporte a representação na tela do computador. A multiplicidade de desenhos enriquece a concretização mental, não existindo mais as situações prototípicas responsáveis pelo entendimento inadequado.

Apresentam interface dinâmica e interativa ('desenhos em movimento' e que podem ser automatizados através do recurso de 'botões'), múltiplas representações (trabalha com geométrica sintética e um pouco de analítica), capturação de procedimentos (tem comando que permite ter acesso a história da construção e comandos para criação de macros. No Cabri Geometry é o próprio desenho que é reconstruído passo a passo; no Sketchpad além disto, tem-se janela adicional onde a construção é explicitada também através de linguagem matemática).

Exemplo 1: Um problema de otimização

No plano são dados dois pontos fixos A e B, e um ponto P que se desloca em uma reta. Dentre todos os caminhos AP+PB determinar o de menor comprimento.

Movimento sobre o ponto P permite a exploração inicial. Se o quadro geométrico não se apresenta suficiente para a resolução do problema, os alunos podem se valer de outras representações: tabela que computa distâncias e gráfico da função que representa a situação geométrica. Ambas as representações se atualizam de acordo com o movimento do ponto P. Nestas representações os alunos podem localizar aproximadamente o ponto que resolve o problema, e o passo seguinte é identificar a particularidade geométrica da solução de caráter experimental. Pode-se ir além, desafiando-se os alunos a responderem a pergunta ‘por que tal ponto resolve o problema?’. A informação visual fornece indícios para a argumentação matemática, que vai se formalizar através de conceitos e teoremas como reflexão, congruência de triângulos e desigualdade triangular. (É interessante comparar a exploração em ambiente informatizado aqui delineada com o trabalho que normalmente se realiza em sala de aula ‘convencional’)

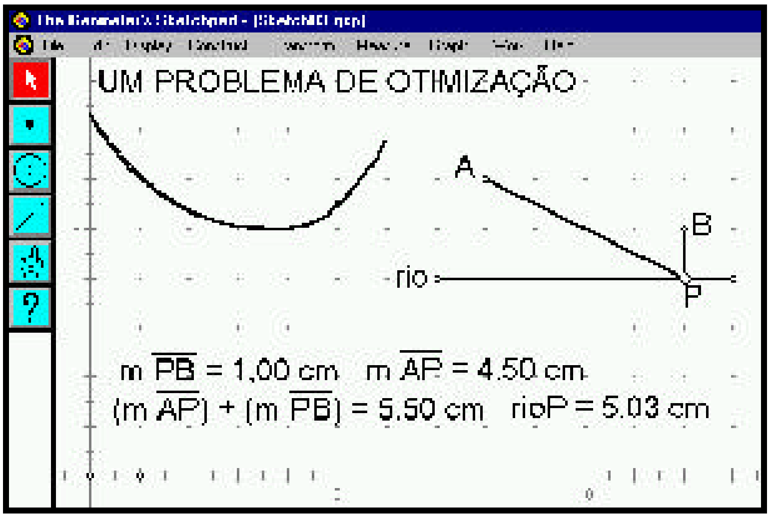

Figura 1 - Um problema de otimização (Sketchpad)

Exemplo 2: Transformações isométricas no plano

São apresentados aos alunos instrumentos virtuais que exploram as transformações isométricas no plano: translação, rotação e reflexão. Os instrumentos são dinâmicos, e manipulando-os os alunos identificam o tipo de transformação e os princípios de construção dos instrumentos. Os princípios de construção de um dado instrumento são invariantes no movimento e portanto são percebidos e abstraídos. O mesmo acontece com a transformação que o instrumento realiza; os invariantes correspondem as propriedades que vão definir a transformação e é através da manipulação que vão se tornando transparentes. O passo seguinte é estabelecer a relação entre as propriedades do instrumento e a transformação que ele realiza, ou seja, é a argumentação matemática. Por exemplo, no instrumento que faz rotação é a partir do ponto O e ângulo α fixos no instrumento, e da congruência entre segmentos que o compõem que se deduz que os pontos P e seu transformado P’ são tais que OP é congruente à OP’ e que o ângulo PÔP’ é sempre igual a α, propriedades que caracterizam a rotação de centro O e ângulo α.

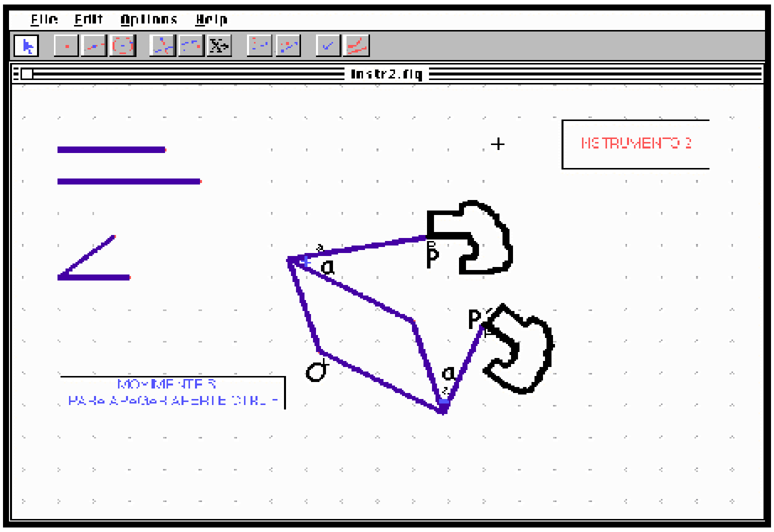

Figura 2- Transformações Isométricas-rotação (Cabri-Geometry)

Exemplo 3: Modelo para exploração de Geometria Hiperbólica

A construção de macros apropriados permite os alunos trabalharem no modelo de Geometria Hiperbólica dado pelo disco de Poincaré. Traçam retas, triângulos, retas paralelas, calculam soma dos ângulos de um triângulo, constróem objetos geométricos neste mundo diferente do euclidiano. É interessante observar que a manipulação dinâmica de um tal modelo pode favorecer o desenvolvimento de aspectos cognitivos que são necessários aos raciocínios matemáticos, na sua forma mais abstrata (se assim pode-se falar).

Figura 3 - Disco Hiperbólico (Sketchpad)

O grande obstáculo cognitivo é a nova idéia de reta que se apresenta, diferente daquela dada pelo mundo que a geometria euclidiana procura descrever. O ambiente informatizado, através de manipulações, propicia as ações mentais que vão tornar este novo mundo completamente familiar, no sentido de concretização mental de um novo universo matemático. Com isto o aluno pode entender que uma geometria é simplesmente definida por seus axiomas e passa a compreender o sentido de demonstração de caráter lógico-dedutivo numa teoria axiomática.

3.2 Modellus - ferramenta para modelação e simulação

É uma ferramenta que permite os alunos realizarem experimentos conceituais, usando para isto modelos matemáticos dados por funções, derivadas, taxas de variação e equações diferenciais. Múltiplas representações e dinamismo através de manipulação direta são dois dos recursos importantes deste ambiente que dão suporte as ações dos alunos. Estes recursos são viabilizados em janelas distintas: janela de modelação, janela de animação dinâmica, janela gráfica e janela de tabulação. Pode ser usado tanto em atividades de expressão (o aluno constroe o modelo, tendo como objetivo a construção conceitual das relações matemáticas que o definem) , como em atividades de exploração (o aluno explora um modelo já pronto e isto é interessante e possível num estudo qualitativo de relações matemáticas, quando o caráter analítico apresenta nível de dificuldade além do que pode dar conta o aluno)

Exemplo1: Taxa de variação e inclinação de reta tangente

Através de simulação de movimento linear de uma partícula os alunos estabelecem inicialmente a relação entre tipo de crescimento/decrescimento das variáveis e forma do gráfico da função que registra a posição da partícula no tempo. Na mesma janela de animação tem-se múltiplas representações: é a partícula que está sendo movimentada com a construção simultânea do gráfico que correspondente a posição da partícula no tempo. Através de manipulação direta sobre a partícula o aluno pode observar que se a velocidade da partícula aumenta o gráfico tem concavidade voltada para cima e se diminui tem concavidade voltada para baixo. O passo seguinte é construir o conceito matemático que registra a qualidade da variação registrada na forma do gráfico. O dinamismo de imagens permite representar retas secantes à curva, com um ponto fixo, cujos coeficientes angulares correspondem a velocidades médias, em intervalos cada vez menores. O dinamismo mostra as retas secantes tendendo a posição de reta tangente e surge então, de forma natural, o conceito de derivada com dupla representação: é taxa de variação e é inclinação de reta tangente à curva. Na janela de gráficos pode-se construir o gráfico da função derivada, e estabelecerem-se relações entre o comportamento da derivada e características da função que rege a simulação (sinal da derivada informa sobre crescimento ou decrescimento da função, zeros da derivada são pontos de máximo ou mínimo ou inflexão, etc...)

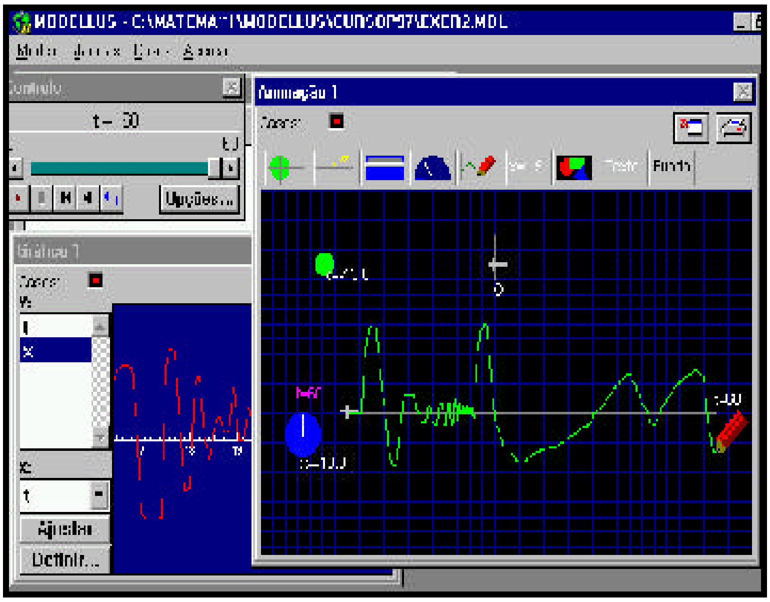

Figura 4 - Simulação de Movimento de Partícula (Modellus)

3.3 Graphmatica - ferramenta para funções reais e curvas no plano

É ambiente para plotagem de equações, funções e derivada de funções, desigualdades no plano cartesiano; curvas paramétricas e polares. Trabalha com coordenadas cartesianas, coordenadas polares e escalas logarítmicas. Tem o recurso de múltiplas representações: expressão analítica, gráficos, podendo plotar até vinte e cinco gráficos simultaneamente, e tabelas. Permite a construção de famílias de funções e o recurso de múltiplas representações viabiliza explorações algébricas e geométricas, simultaneamente. Calcula derivada de função simbolicamente e numericamente e plota a reta tangente a curva num dado ponto; também calcula numericamente integral definida, através de diferentes métodos, desenhando no gráfico as regiões poligonais correspondentes, com possibilidade de escolha da partição.

Exemplo 1: Transformações em gráficos

A partir de uma função básica e de seu gráfico, o aluno passa a explorar família de funções. O recurso de múltiplas representações, no caso analítica e geométrica, favorece a construção de relações entre operações algébricas na expressão da função e movimentos geométricos em gráficos. Em uma família, a função básica é a que tem a expressão algébrica mais simples, e as demais funções são obtidas a partir de operações algébricas sobre a expressão da função básica. Os gráficos dos elementos da família são identificados a partir de movimentos geométricos aplicados ao gráfico da função básica: translação vertical ou horizontal; dilatação ou contração nas direções horizontais e verticais; reflexões. Com a possibilidade de plotar simultaneamente diversos elementos da família, o aluno explora o tipo de movimento aplicado ao gráfico da função básica.

Por exemplo, na família dos polinômios de grau dois a função básica é $y = x^2$ e a família é constituída pelas funções $y = a \cdot (x+b)^2 + c$. O aluno faz variações nos parâmetros da família e investiga o efeito geométrico sobre o gráfico da função básica. Já na escolha de estratégia de exploração é exigido do aluno trabalho de reflexão. Passo a passo, o aluno vai construindo as relações que vão permiti-lo concretizar mentalmente e com segurança o gráfico de qualquer elemento da família, como por exemplo y = -1/3*(x+1/2)^2+5, para isto não dependendo de tabela numérica, mas tão somente de movimentos geométricos. Este estudo pode prosseguir na direção de mudanças de sistemas de coordenadas e as decorrentes simplificações de expressões analíticas.

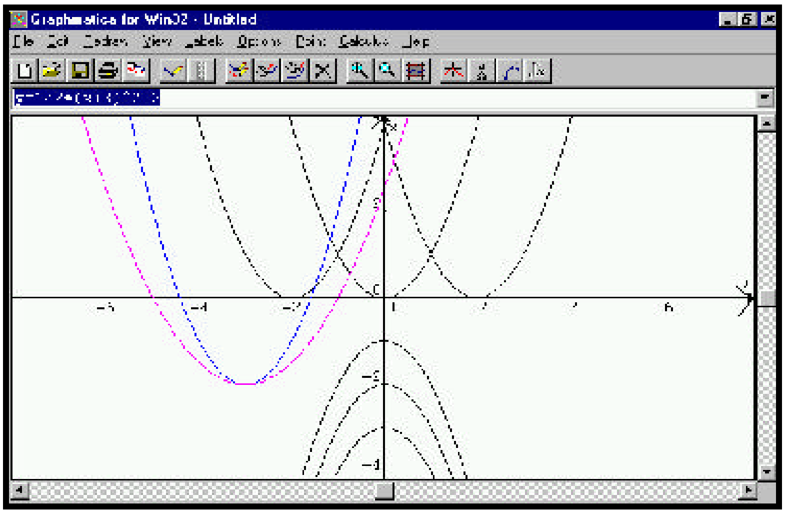

Figura 5 - Transformações em gráficos (Graphmatica)

COMENTÁRIOS FINAIS

Neste trabalho, a partir do estabelecimento de relações entre aprendizagem e processos cognitivos, a luz da teoria de Piaget, procurou-se evidenciar o quanto certos ambientes informatizados são ferramentas de grande potencial em projetos educativos dentro de perspectiva construtivista. O que pretendeu-se destacar é o quão natural e intensas, se tornam, nestes ambientes, as ações, reflexões e abstrações dos aprendizes. O suporte oferecidos pelos ambientes não só ajudam a superação dos obstáculos inerentes ao próprio processo de construção do conhecimento matemático, mas também podem acelerar o processo de apropriação de conhecimento. Como exemplificou-se, modelos matemáticos significativos e de natureza complexa podem ser trabalhados, sob ponto de vista qualitativo, mesmo que os alunos ainda não dominem a complexidade das equações matemáticas que definem o modelo. Ou ainda, um primeiro contato com a geometria hiperbólica, através de modelo dinâmico e manipulativo, pode favorecer, e muito, a compreensão da natureza do conhecimento matemático. Conforme os ambientes tornam-se mais ricos nos seus recursos, mais acessíveis vão se tornando aos alunos idéias matemáticas significativas e profundas.

Mas os ambientes informatizados, na forma que se apresentam hoje, por si só, não garantem a construção do conhecimento. Para que haja avanço no conhecimento matemático, é importante que o professor projete as atividades a serem desenvolvidas. Uma tarefa difícil é conciliar o que se julga importante a ser aprendido (e é matemática socialmente aceita que fornece os parâmetros para tal) com a liberdade de ação do aluno. Assim, por exemplo, se o objetivo é o aprendizado da Geometria, atividades devem ser projetadas para tal. Não basta colocar a disposição do aluno um programa de construção em Geometria; o aluno certamente vai aprender alguma coisa. Mas a apropriação de idéias matemáticas significativas nem sempre acontecem de forma espontânea, mesmo nestes ambientes, e assim um trabalho de orientação por parte do professor, se faz necessário. São os desafios propostos pelo professor que vão orientar o trabalho, desafios estes que se tornam de genuíno interesse dos alunos, desde que não sejam eles privados de suas ações e explorações.

Pode-se dizer que os ambientes informatizados apresentam-se ainda como simples ferramentas de suporte ao processo de ensino e aprendizagem. Está-se procurando mudança nos métodos, a partir da incorporação dos novos recursos. É dentro deste espírito que este trabalho se insere. O primeiro passo, natural em todo momento de transição, é a adaptação do antigo ao novo, ainda que de forma um tanto tímida. Isto percebe-se tanto na forma como estão sendo concebidos os ambientes como na forma como estão sendo incorporados ao processo educativo. A efetiva utilização destes ambientes é um grande desafio:

"É certo que a escola é uma instituição que há cinco mil anos se baseia no falar / ditar do mestre, na escrita manuscrita do aluno e, há quatro séculos, em um uso moderado da impressão. Uma verdadeira integração da informática supõe o abandono de um hábito antropológico mais que milenar, o que não pode ser feito em alguns anos." (Levi,1993)

“A necessidade de novos conteúdos de Matemática que visem capacitar os estudantes para o próximo século não é compatível com as estruturas curriculares vigentes...Novas

alternativas curriculares dependem de substancial aplicação de potentes tecnologias. Este processo deve incluir dramático crescimento nas interações entre os participantes do processo educacional e entre os recursos disponíveis". (Kaput,1996)

É um desafio que envolve aspectos como a própria construção dos ambientes, a formação de professores e novas propostas curriculares. Mas por outro lado, não é difícil pensar num futuro para a educação em que os ambientes informatizados vão ultrapassar sua função de simples ferramentas de apoio ao pensar, na forma que a psicologia cognitiva hoje explica, passando então a ter papel fundamental no próprio desenvolvimento de novas capacidades cognitivas do indivíduo, ainda hoje não imaginadas. E com conseqüências sobre a própria natureza do conhecimento e do conhecimento matemático, em particular.

REFERÊNCIAS

Becker,F. 1997: Da Ação à Operação, Editora Palmarinca.

Dubinsky,E. 1991: Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking , em D.Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Press.

Gravina, M.A. 1996: Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria, Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte, MG.

Hebenstreint,J. 1987: Simulation e Pédagogie, une recontre du troisième type, Gif Sur Yvette: École Superieure d'Eletricité.

Kaput,J. 1992: Technology and Mathematics Education, em Grows, D. (ed), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning , MacmillanPublishing Company.

Mellar,H., Bliss,J., Boohan,R., Ogborn,J.& Tompsett,C. (eds) 1994: Learning with Artificial Worlds - Computer Based Modelling in the Curriculum, The Falmer Press.

Ogborn,J.1997: Modeling Clay for Thinking and Learning, pre-print.

Papert, S. 1994: A Máquina das crianças: repensando a escola na era da Informática. Porto Alegre, Artes Medicas.

Papert, S. 1988: Logo: computadores e educação. Editora Brasiliense.

Piaget,J. 1974: Aprendizagem e Conhecimento, em Piaget, P. & Gréco, P., Aprendizagem e Conhecimento, Freitas Bastos, Rio de Janeiro.

Piaget,J. 1967: Biologie et Connaissance, Paris: Gallimard.

Piaget, J. 1973: Comments in Mathematical Education, em A.G.Howson (ed) Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge University Press.

Richards,J. 1991: Mathematical Discussion, em E. von Glaserfeld (ed) Radical constructivism in Mathematical Education. Dordrecht, The Nederlands: Kluwer

Santarosa, L.M.C. 1995: Formação de professores em Informática na Educação, Actas do II Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, Lisboa/Portugal,1995, vol.II, .pag. 22-23

Teodoro,V.D. 1997: Modellus: Using a Computacional Tool to Change the Teaching and Learning of Mathematics Science, Actes Colloquium New Technologies an the Role of Teacher, Open University, Milton Keynes, UK.

Thompson, E. 1992: "Blocks Microworld" (software), University of Califórnia, San Diego, CA.

Vergnaud,G. 1990: Epistemology and Psychology of Mathematics Education, in Mathematics and Cognition - ICMI Study Series.

APÊNDICE - Informações adicionais sobre os programas apresentados no artigo.

Cabri Geometry

É criação de J.M. Laborde e F.Bellemain, ambos do Institut d'Informatique et Mathématiques Apliquées de Grenoble (IMAG)- Université Joseph Fourier, Grenoble, França.

1.Acesso à versões demonstrativas do software:

Em Português: PUCSPDI@fpsp.fapesp.br

Em Inglês: http://www-cabri.imag.fr

2.Mostra de atividades de ensino, artigos e grupos de discussão:

http://proem.pucsp.br/cabri/ativ.htm - Programa de Estudos e Pesquisa no Ensino da Matemática - PUCSP - apresenta atividades para séries finais do primeiro grau.

http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/licenciatura.html- Site do Curso de Licenciatura em Matemática - UFRGS

http://www.edc.org/LTT/DG/ -Dynamical Geometry Projeto de pesquisa no Education Development Center, Inc., Newton-EUA.

http://www-cabri.imag.fr/ - Cabri History

Sketchpad

É criação de Nicholas Jackiw e Scott Sketetee. Comercializado pela KeyCurriculum Press.

1.Acesso ao programa:

http://www.keypress.com/product_info/sketch-demo

2.Mostra de atividades de ensino, artigos e grupos de discussão:

http: //forum.swarthmore.edu /sketchpad /gsp.activities /home.html-The Geometer's Sketchpad Activity Center

http: //forum.swarthmore.edu /sketchpad /gsp.gallery /gallery.html - The Geometer's Sketchpad Gallery

http: // www.edc.org / LTT / DG/ - Dynamical Geometry - Projeto de pesquisa no Education Development Center, Inc., Newton-EUA.

Modellus

É criação de Vitor Duarte Teodoro, João Paulo Vieira e Filipe Costa Clérigo, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Nova Lisboa.

Acesso ao programa: http://phenix.sce.fct.unl.pt/modellus

Graphmatica

É criação de Keith Hertzer.

Acesso ao programa: http://www8.pair.com/ksoft/