ON
OBSERVATÓRIO NACIONAL

## A Geometria dos Espaços Curvos ou Geometria Não-Euclidiana

Vimos que a geometria Euclidiana funcionava muito bem em superfícies planas o que era de se esperar. Afinal das contas, a geometria Euclidiana é uma geometria plana.

Então, como podemos definir situações geométricas sobre uma superfície curva? Certamente a geometria Euclidiana não é satisfatória como mostraremos.

Vimos que na geometria Euclidiana a soma dos ângulos internos de um triângulo dá sempre o valor de $180^o$. Quando traçamos o mesmo ângulo sobre uma superfície curva isso já não é mais verdade. Era preciso então estabelecer uma nova geometria que pudesse resolver essas questões.

Alguns poderão estar fazendo a seguinte pergunta: a Terra é uma (quase) esfera, a geometria de Euclides funciona na Terra, então porque a geometria de Euclides não pode explicar uma geometria curva? Ocorre que, localmente, podemos considerarque estamos trabalhando em um plano. Entretanto, quando precisamos considerar grandes distâncias sobre a superfície da Terra a geometria de Euclides também não funciona. Isso é visto em navegação de longo curso, onde a curvatura da Terra não pode ser desprezada.

Para desenvolver uma geometria de espaço curvos foi necessária a colaboração de pesquisadores que marcaram a história da matemática. Entre esses nomes estavam Gauss, Bolyai, Lobachevski e Riemann. Só que o preço pago por alguns desses matemáticos foi absurdamente alto. A hostilidade despertada a essas idéias fez com que esses matemáticos, com excessão de Gauss e Riemann, fossem duramente rejeitados por seus colegas e pelo público.

Johann Carl Friedrich Gauss


**Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)**

Este foi o maior matemático de sua época. Já aos sete anos de idade, ainda na escola elementar, Gauss mostrou seu potencial matemático ao demonstrar quase imediatamente a seus professores a soma dos número inteiros de 1 a 100 notando que isso representava a soma de 50 pares de número e que a soma dos números de cada par dava sempre o resultado 101.

Desde o início dos anos de 1800 Gauss começou a se interessar pela questão da possível existência de geometrias não-Euclidianas. Sabemos a partir dos seus livros de anotações que Gauss desenvolveu partes de uma nova geometria, não euclidiana, já nos anos de 1820. No entanto, Gauss sabia que a existência de uma geometria não Euclidiana faria uma perturbação imensa na matemática. Mais ainda, ele notou que a reação de seus colegas a essa descoberta, e a qualquer um que a apoiasse publicamente, seria extremamente dura. Desse modo Gauss preferiu manter seus status social e não divulgou os resultados de sua pesquisa. Deve ficar claro, entretanto, que Gauss não se acovardou cientificamente. Ele manteve correspondencia sobre o assunto com vários matemáticos de sua época, embora sem adaptar seu extenso trabalho para a forma de artigo científico.

Gauss também demonstrou grande interesse na chamada geometria diferencial. Ele publicou vários artigos sobre esse assunto e em 1828 apresentou um dos seus mais importantes artigos onde estava contido o famoso "teorema egregium" além de importantes idéias geométricas tais como a da curvatura Gaussiana.

## János Bolyai

János Bolyai (1802 - 1860)

János Bolyai foi uma criança prodigio. Filho do matemático Farkas Bolyai, ele teve toda a sua infância voltada para o aprendizado da matemática. Tendo seu pai como professor desse assunto, aos treze anos János Bolyai já dominava todo o cálculo e várias formas de mecânica analítica.

Em 1832, após cinco anos de estudos, Bolyai publicou os resultados de sua pesquisa sobre geometrias não-Euclidianas como um apêndice a um trabalho volumoso de seu pai, o matemático Farkas Bolyai.

Bolyai teve uma vida dura. Ele morreu em 1860 e a cerimônia de seu enterro parecia um ritual de esquecimento. Apenas três pessoas estiveram presente para ver seus restos mortais serem colocados em um túmulo coletivo sem lápide. O registro de sua morte na igreja dizia apenas: "Sua vida passou inutilmente".

Curiosamente, Bolyai nunca publicou seus trabalhos exceto algumas poucas páginas no apêndice do livro de seu pai. No entanto, ele deixou mais de 20000 páginas de manuscritos de trabalhos sobre matemática desenvolvidos por ele até a sua morte.

A imagem de Bolyai mostrada ao lado foi tirada de um selo postal usado na Hungria. Alguns historiadores não acreditam que ela seja autêntica. Possivelmente não existem imagens do grande matemático János Bolyai.

## Nicolai Ivanovich Lobachevski

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 - 1856)

Lobachevski era um dos três filhos de uma família russa muito pobre. Em 1800, quando Lobachevski tinha apenas sete anos de idade, seu pai faleceu e sua mãe mudou-se para a cidade de Kazan, próxima à fronteira com a Sibéria. Lá Lobachevski começou seus estudos, sempre financiado por bolsas escolares devido à pobreza de sua família.

Em 1804 o Czar Alexander I da Rússia reformou a Universidade de Kazan e convidou vários professores estrangeiros, principalmente da Alemanha, para ensinarem na Universidade. Um desse professores era Martin Bartels (1769 - 1833) que ocupou o cargo de professor de matemática da Universidade. Bartels era muito amigo de Gauss e os dois se correspondiam sobre assuntos cientificos com bastante freqüência. Foi Bartels que fez com que Lobachevski, inicialmente interessado em estudar medicina, se apaixonasse pela matemática.

O pricipal trabalho de Lobachevski foi "Geometriya" terminado em 1823 mas somente no dia 23 de fevereiro de 1826 é que ele fez sua famosa apresentação "Sobre os Fundamentos da Geometria" em uma sessão do Conselho Científico do Departamento de Física e Matemática da Universidade de Kazan. Esse trabalho foi publicado em 1829.

O interesse de Lobachevski na geometria não-Euclidiana fez com que ele fosse visto na Russia como uma "pessoa excêntrica", para usarmos um termo delicado. Ele foi atacado em um artigo humilhante e ignorante publicado no periódico "O Filho da Pátria" ao mesmo tempo em que membros distintos da comunidade de matemáticos russos faziam zombarias e publicavam rudes comentários sobre ele. Todos os estudantes de Lobatchevski o abandonaram e no seu funeral, quando era comum serem realizados discursos enaltecendo a obra do defunto, nada foi dito sobre o assunto que foi a principal investigação de sua vida: a geometria não-Euclidiana.

## Por que precisamos de geometrias não-euclidianas?

Que tipo de argumento científico poderia ter chamado a atenção de matemáticos tão ilustres como Nikolai Lobachevski, János Bolyai, Carl Gauss e Bernhard Riemann para que dedicassem parte de sua vida a estabelecer uma geometria que ia contra o senso comum, a vida diária?

Basicamente o que esses pesquisadores investigavam era o que ocorreria se eles desprezassem o quinto postulado de Euclides e considerassem exatamente o oposto ou seja, que através de um ponto C não situado sobre uma dada linha reta AB, pudessemos traçar não uma mas duas , e consequentemente um número infinito, de linhas paralelas a AB.

A tarefa agora passava a ser construir uma geometria baseada nesse novo axioma. A idéia subjacente a isso era que se o quinto postulado era realmente um teorema então, mais cedo ou mais tarde, a nova geometria conteria contradições lógicas, o que significaria que a suposição inicial estava errada e o quinto postulado estaria então provado.

Só que, após construir essa nova geometria os matemáticos não encontraram contradições. Mais ainda, eles descobriram que tinham uma nova e elegante geometria com várias características interessantes e únicas.

Por exemplo, nessa nova geometria a soma dos ângulos internos de um triângulo era menor do que $180^{o}$ e de fato dependia das dimensões lineares do triângulo.

Essa nova geometria era bastante particular. Em uma região bastante pequena do espaço essa nova geometria era praticamente Euclidiana mas em grandes regiões as duas eram essencialmente diferentes.

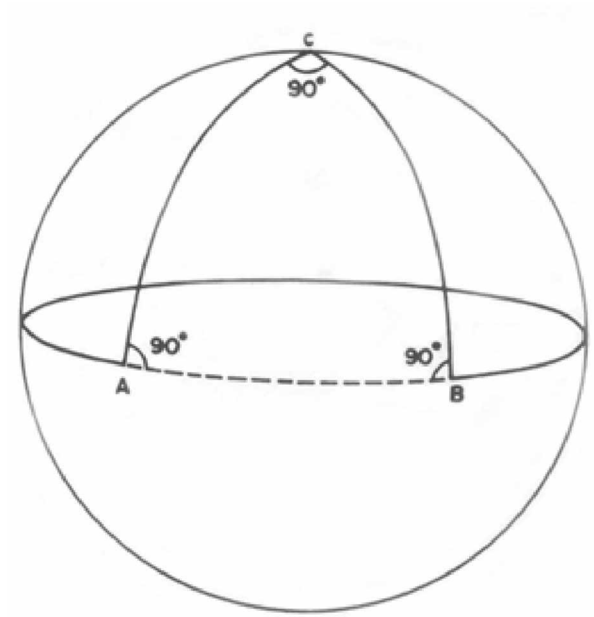
É importante notar que tanto Lobachevski como Gauss não se limitaram aos aspectos matemáticos dessa importante descoberta. Eles imediatamente começaram a pensar como essa nova geometria poderia estar relacionada com o mundo físico. Eles queriam saber qual das duas geometrias, a Euclidiana ou a não-Euclidiana recém descoberta, descrevia realmente o espaço. Tentando responder a essa questão Gauss tentou medir a soma dos ângulos de um triângulo formado por três montanhas. Lobachevski tentou fazer a mesma medida só que usando um triângulo bem maior formado por duas posições da Terra em sua órbita e uma estrela distante de paralaxe conhecida. Infelizmente nenhum dos dois foi bem sucedido pois, naquela época eles não dispunham de equipamentos capazes de fornecer a precisão necessária para essas medidas.

Vamos explicar melhor o que é uma geometria não-Euclidiana.

Suponha que a Terra é perfeitamente esférica e que ela é habitada por "seres planos", criaturas absolutamente sem graça que têm apenas duas dimensões e que não percebem o sentido de "altura". Lembre-se que estas criaturas se deslocam se arrastando sobre a superfície terrestre.

O método usado por estas criaturas para identificar "linhas retas" como sendo as linhas de mais curta distância entre dois pontos consiste em estender linhas através da superfície conectando dois pontos quaisquer. Para essas criaturas essa linha parece ser uma reta à medida que elas se movem ao longo delas uma vez que as direções de chegada ou de partida dessas criaturas em qualquer ponto sobre a linha tem ângulo zero entre elas.

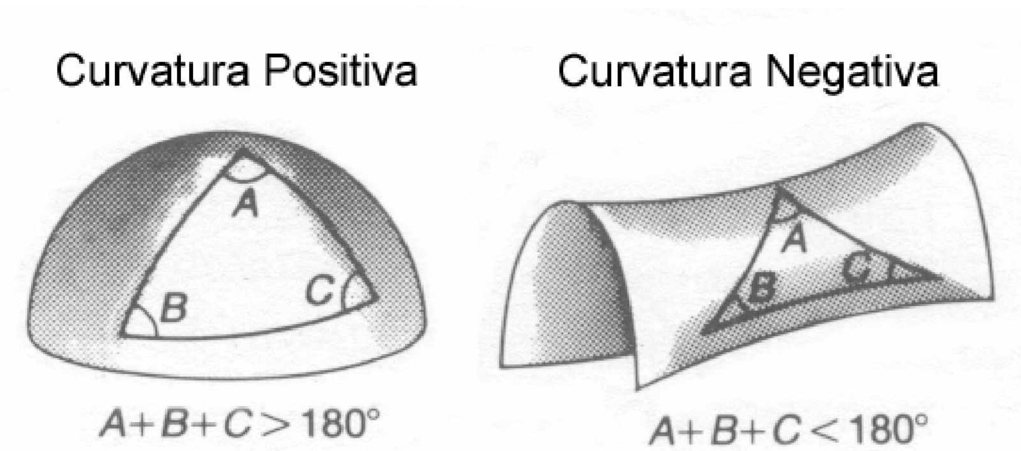
Com esta definição os "seres planos" encontram que todas as linhas retas se interceptam e que movendo-se ao longo de qualquer linha reta eles finalmente retornam ao seu ponto de partida (lembre-se que os "seres planos" estão vivendo sobre a superfície de uma esfera). Eles também descobrem que a soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo que eles desenham sobre a Terra não dá mais como resultado o valor correspondente a dois ângulos retos como ocorre na geometria de Euclides. Em vez disso a soma desses três ângulos internos sempre *excede* dois ângulos retos. A figura abaixo mostra uma situação onde a soma é igual a *três* ângulos retos.




Ao contrário da geometria Euclidiana, as geometrias que estamos agora apresentando são definidas sobre a superfície de uma esfera ou de um hiperbolóide (algo parecido com a sela de um cavalo)

As imagens abaixo mostram essas duas geometrias. Dizemos que uma superfície esférica tem uma curvatura positiva enquanto que a superfície de um hiperbolóide tem curvatura negativa.

Vemos que em uma superfície com curvatura positiva a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado nessa superfície é maior que 180 graus. No caso de uma superfície com curvatura negativa a soma desses ângulos internos será menor que 180 graus.




Como a Teoria da Gravitação de Einstein prevê que o existência de curvatura no espaço-tempo, necessariamente ela terá que utilizar as geometrias não-euclidianas.

Existe um número muito grande de espaços possíveis e cada um deles tem sua própria geometria. Todos eles são igualmente válidos e auto-consistentes. O espaço Euclideano, por exemplo, é uniforme. Ele é homogêneo e isotrópico.

Por homogêneo queremos dizer que suas propriedades são as mesmas em qualquer local definido sobre ele.

Ser isotrópico significa que suas propriedades não dependem da direção em que são consideradas.

Além disso o espaço Euclidiano tem uma geometria de congruência. Isso quer dizer que nele todas as formas espaciais são invariantes sob translação e/ou rotação. Deste modo, se o raio da circunferência e diâmetro de um círculo é $\pi$ este raio é o mesmo em todos os pontos para todos os círculos.

De todos os possíveis espaços não Euclideanos existem somente dois que também são uniformes (ou seja, homogêneos e isotrópicos) do mesmo modo que o espaço Euclideano. Ambos foram descobertos no século XIX.

O primeiro tem uma geometria hiperbólica e foi descoberto a partir dos trabalhos do matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss, do matemático russo Nicolai Ivanovich Lobachevski e do matemático húngaro János Bolyai.

O segundo tem a geometria esférica e foi descoberto pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann.

O trabalho de Riemann


Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

O passo seguinte no desenvolvimento da geometria não-Euclidiana foi feito pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann. Para obter uma posição de professor assitente na Universidade de Göttingen Riemann tinha que fazer uma palestra que serviria como teste. Seguindo o procedimento existente ele apresentou ao departamento três tópicos para que fosse escolhido o seu assunto de palestra. Dois desses tópicos versavam sobre problemas correntes entre os matemáticos da época enquanto que o terceiro estava voltado para os fundamentos da geometria. Embora esse último assunto fosse o menos preparado por Riemann, Gauss o escolheu querendo saberv como um jovem matemático trataria tema tão dificil.

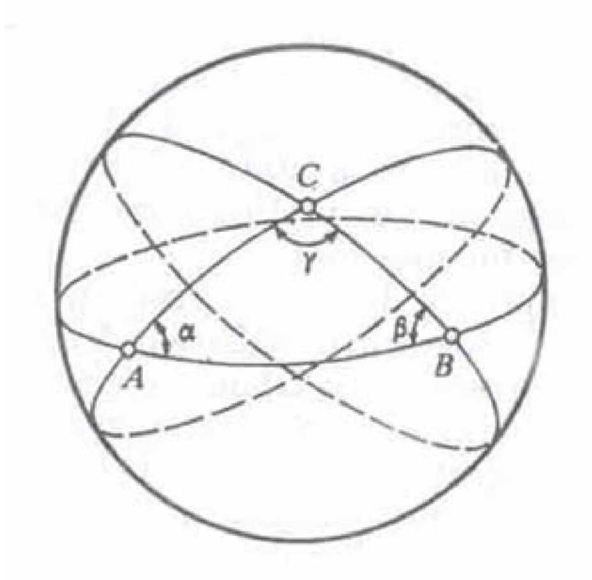
Riemann deu sua palestra sobre esse tema, que mais tarde foi publicada com o título de "Sobre as Hipóteses subjacentes aos fundamentos da Geometria", com sucesso absoluto. Após o término da palestra Gauss permaneceu em silêncio e então levou Riemann aos céus, algo bastante raro de ser feito por ele.

Gauss ficou impressionado pela abordagem feita por Riemann para a geometria não-Euclidiana pelo fato de que ela era bem diferente daquelas apresentadas por seus antecessores. Aparentemente Riemann não sabia nada sobre os trabalhos de Lobachevski e Bolyai e tinha somente uma vaga idéia do interesse de Gauss pelo assunto. O sucesso de Riemann se deve ao fato dele ter incorporado em seu estudo duas idéias extremamente férteis: o aparato matemático de Gauss para descrever a geometria de superfícies curvas bi-dimensionais e seu próprio novo conceito de variedade multidimensional ou seja, objetos geométricos com múltiplas dimensões.

Uma superfície é uma variedade bi-dimensional, um espaço é uma variedade tri-dimensional, etc. Como essa é a única diferença entre elas todas as idéias e métodos usados para descrever superfícies bi-dimensionais podem ser agora diretamente aplicados a espaços curvos tri-dimensionais. Entre as noções usadas a mais importante é aquela de métrica ou seja, a forma quadrática para as diferenças entre coordenadas que descreve o comprimento do intervalo entre dois pontos vizinhos em uma variedade curva.

Esta bem sucedida integração de idéias permitiu que Riemann avançasse ao construir tanto casos particulares de espaços não-Euclidianos como uma teoria de espaços arbitrariamente curvos.
Em primeiro lugar Riemann descobriu uma geometria esférica que era oposta à geometria hiperbólica de Lobachevski. Deste modo ele foi o primeiro a indicar a possibilidade de existir um espaço geométrico finito. A idéia logo se firmou e trouxe a questão de se o nosso espaço físico era finito. Além disso Riemann teve a coragem de construir geometrias muito mais gerais do que a de Euclides e mesmo as aproximadamente não-Euclidianas conhecidas.

A geometria Riemanniana é uma geometria não-Euclidiana de espaços de curvatura constante positiva. A propriedade essencial desse espaço tri-dimensional é que seu volume é finito de modo que se um ponto se move sobre ela na mesma direção ele pode certamente retornar ao ponto de partida. Como vemos ao lado, em vez das linhas retas da geometria Euclidiana na geometria esférica Riemanniana temos geodésicas ou seja, os arcos dos grandes círculos que podem ser traçados sobre a esfera.




A partir de uma ilustração bi-dimensional da geometria sobre a esfera, mostrada ao lado, é claro que a noção de linhas paralelas como dada pelo quinto postulado de Euclides neste caso não tem qualquer sentido pois qualquer arco de um grande círculo que passa através de um ponto C, não situado sobre AB, necessariamente irá interseptar AB e até mesmo em dois pontos. A figura também mostra que a soma dos ângulos de um triângulo formado por três arcos que se interseptam de três grandes círculos é sempre maior do que $180^o$.

Comparando as geometrias não-Euclidianas

Uma maneira prática pela qual podemos distinguir entre essas três geometrias é o seguinte: pegue uma folha de papel e coloque-a sobre uma superfície plana. O papel irá cobrir a superfície suavemente. Tente agora com uma folha de papel do mesmo tamanho cobrir uma superfície esférica. Você agora verá que para cobri-la terá que permitir que vincos surjam no papel. Isso indica que próximo a qualquer ponto dado sobre a superfície da esfera a área do papel é maior do que a área que você está tentando cobrir. Quando você tenta cobrir a superfície de uma sela com a mesma folha de papel verá que o inverso acontece: a área do papel passa a ser insuficiente para cobrir a superfície próxima a qualquer ponto sobre ele e o papel se rasga.

| Comparandos os três espaços uniformes | |
|---|---|
| espaço euclidiano | através de um ponto dado podemos traçar somente uma paralela a uma linha reta. |
| | a soma dos ângulos interiores de um triângulo é igual a dois ângulos retos. |
| | a circunferência de um círculo é igual a $\pi$ vezes o seu diâmetro. |
| espaço esférico | através de um ponto dado não podemos traçar nenhuma paralela a um ponto dado. |
| | a soma dos ângulos interiores de um triângulo é maior do que dois ângulos retos. |
| | a circunferência de um círculo é menor do que $\pi$ vezes o seu diâmetro. |
| espaço hiperbólico | através de um ponto dado podemos traçar mais de uma paralela a uma linha reta. |
| | a soma dos ângulos interiores de um triângulo é menor do que dois ângulos retos. |
| | a circunferência de um círculo é maior do que $\pi$ vezes o seu diâmetro. |

## Geodésicas

A teoria relativística da gravitação trata, em geral, com espaço-tempo curvos. Em espaço-tempo desse tipo os movimentos das partículas assim como o da luz são curvos. Entretanto, essas curvas têm uma característica comum com as linhas retas.

Do mesmo modo que as linhas retas são as trajetórias mais curtas conectando dois pontos de um espaço plano, os movimentos nos espaços-tempo curvos percorrem as linhas curvas mais curtas entre dois pontos. Tais curvas são chamadas geodésicas. Por exemplo, sobre a superfície de uma esfera podemos traçar somente curvas e não linhas retas. De todas as curvas que conectam dois pontos a mais curta é o arco de um grande círculo. Por conseguinte as geodésicas sobre a superfície de uma esfera são os arcos de grandes círculos.

A luz segue curvas geodésicas. Dizemos que a luz não se move uniformemente ao longo de linhas retas não porque ela está sujeita a alguma força mas por que o espaço-tempo é curvo. Isso é muito importante por que mostra que o conceito de força foi substituido pelo conceito geométrico de curvatura do espaço-tempo.

A teoria da relatividade geral trata, em geral, com espaços-tempo curvos. Nesses espaços-tempo os movimentos das partículas, asim como da luz, são descritos por linhas curvas. Entretanto essas linhas curvas têm uma característica comum com as linhas retas.

## Geometria e cosmologia

A geometria do espaço é de grande importancia para a cosmologia uma vez que a teoria relativística da gravitação se apoia inteiramente na idéia de que a geometria do espaço em qualquer local no Universo está diretamente relacionada com a intensidade do campo gravitacional naquele local. Quanto mais intenso é o campo gravitacional então mais forte será a curvatura correspondente.

Poderíamos dizer, de uma maneira bastante livre e baseado exclusivamente nas questões de geometria discutidas acima, que em um contexto cosmológico os três tipos de curvaturas podem nos dar

- o universo de curvatura positiva corresponde a um universo que se expandirá até uma certa sepração entre as galáxias e então contrairá de volta até um espaço zero. Este é o chamado universo fechado.
- o universo de curvatura zero corresponde a um universo que se expande para sempre, diminuindo sua velocidade à medida que faz isso. Este é o chamado universo espacialmente plano.
- o universo de curvatura negativa corresponde a um universo que se expandirá para sempre. Este é o chamado universo aberto.